



## El análisis de los impactos contaminantes desde la óptica de los subsistemas: un planteamiento input-output alternativo

Vicent Alcántara

Departament d' Economia Aplicada, Universitat Autònoma de Barcelona

### Resumen

En el marco del análisis input-output, el estudio de un sector particular sin desvincularlo del resto del sistema es posible realizarlo tratando a dicho sector como un subsistema que genera un único output final, el del propio sector. En este trabajo, hemos abordado el estudio de un sector productivo particular, en el marco de una economía regional, atendiendo a dicho planteamiento. Para ello, hemos desarrollado una propuesta metodológica alternativa al análisis convencional de impactos ambientales, que repara más en la responsabilidad sectorial atendiendo a los procesos industriales que al consumo.

Dada la importancia de los vínculos interregionales desde la perspectiva de una economía regional, bien con la economía de otras regiones como con el resto del país, hemos ampliado el campo de la investigación aplicando un planteamiento interregional.

A partir de la aplicación del método propuesto, sobre una economía concreta, computando las expresiones que hemos considerado destacables, el investigador puede desarrollar indicadores pertinentes, tanto para distinguir la importancia de los mismos como para la implementación de análisis comparativos.

### Abstract

Within the framework of input-output analysis, the study of a particular sector without separating it from the rest of the system is possible by analysing it as a subsystem that generates a single final output. In this paper, we have approached the study of a particular productive sector, within the framework of a regional economy, according this approach. To do this, we have developed an alternative methodological proposal to the conventional analysis of environmental impacts, which pays more attention to sectoral responsibility by attending to industrial processes than to consumption.

Given the importance of interregional links from the perspective of a regional economy, both with the economy of other regions as well as with the rest of the country, we have expanded the field of research by applying an interregional approach.

Starting from the application of the proposed method on a specific economy, computing the expressions that we have considered remarkable, the researcher can develop useful indicators, both to distinguish their importance and for the implementation of comparative analyses.

### Introducción

No siempre estamos interesados en el análisis de los impactos contaminantes de todo el sistema económico. Existen, en general, sectores productivos con la suficiente entidad como para ser analizados por sí mismos. No obstante, nos interesa ver la importancia en cuanto al impacto de un sector en toda su complejidad. Esto es, atendiendo a sus relaciones con el conjunto del sistema productivo.

En el marco del análisis input-output, el estudio de un sector particular sin desvincularlo del resto del sistema es posible realizarlo tratando a dicho sector como un subsistema que genera un único output final, el del propio sector. El artilugio de los subsistemas fué

planteado por Sraffa (1960), en el apéndice A de la obra citada. El concepto de subsistema es relativamente sencillo. Como el mismo Sraffa señala, si consideramos un sistema de industrias en el que cada una produce una mercancía diferente (tal como ocurre en una tabla input - output), “tal sistema puede ser dividido en tantas partes como mercancías haya en su producto neto, de tal modo que cada parte forme un sistema de auto-reemplazamiento menor cuyo producto neto se componga de una sola clase de mercancía. Estas partes serán denominadas subsistemas”.

En palabras de Siniscalco (1982), “un subsistema es una unidad que agrupa todas las actividades, de todas las ramas de actividad, utilizadas directa e indirectamente para satisfacer la demanda final de un determinado bien. En un contexto de ramas productivas interdependientes, un subsistema incluye entonces un conjunto de actividades que pertenecen a diferentes ramas como una 'reconstrucción' por integración vertical de todo el proceso productivo que (idealmente) da lugar a un bien específico para uso final ”. Obviamente, el subsistema objeto de estudio puede estar constituido por un conjunto de sectores o ramas productivas, tal es el caso en Alcántara y Padilla (2009) y Piaggio et al. (2014)

Un subsistema nos permite ver la estructura productiva particular de cada una de las  $n$  industrias que conforman el sistema económico. Parece evidente, pues, el interés que tendría que despertar un útil de este tipo de cara al análisis de los impactos ambientales de una industria concreta.

El análisis de subsistemas y su vinculación a la problemática ambiental (contaminación, consumo de recursos, energía, etc.) a partir del concepto de integración vertical (Pasinetti, 1977), como después veremos, se encuentra en Alcántara (1995) que desarrolla el análisis de subsistemas generadores de contaminación de forma ampliamente desagregada. Lo que permite analizar las interconexiones contaminantes que tienen lugar en un sistema productivo con el fin de obtener la demanda final de un sector cualquiera. Un trabajo que completa y enriquece el anterior es el realizado por Sánchez-Chóliz y Duarte (2003). Se trata de una aplicación de la metodología anterior a la contaminación del agua por la actividad económica en la región española de Aragón. Los autores obtienen cinco índices de medición correspondiente a cada rama productiva y cada tipo de contaminación. Otras aplicaciones son desarrolladas por Alcántara y Padilla (2009) respecto a las emisiones de dióxido de carbono en España y por Navarro y Alcántara (2010), en referencia a las emisiones de metano del subsistema agroindustrial de Cataluña. Recientemente, Llop y Tol (2012) abordan el análisis de las emisiones de gases de efecto invernadero en Irlanda desde la óptica de los subsistemas, desde la perspectiva de todas las ramas productivas. Una aplicación complementaria del análisis de subsistemas fue implementada por Fritz et al. (1998) para analizar la presión de los sectores no contaminantes en los contaminantes de la región de Chicago.

## Integración vertical y subsistemas

Consideremos el producto matricial siguiente, en el que  $\hat{\mathbf{A}}$  expresa la diagonalización del vector<sup>1</sup> correspondiente:

$$(1) \quad (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \hat{\mathbf{y}}$$

Este producto determina un conjunto de vectores  $\mathbf{x}^{(j)}$  que expresan la cantidad de output que todos los sectores han de realizar para la obtención de la demanda final del sector  $j$ -ésimo. De tal manera que:

$$(2) \quad \sum_i \mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}$$

reproduce el output total de la economía.

Y el subsistema generador de la producción final del sector  $j$ -ésimo vendría dado por:

$$(3) \quad \mathbf{A}\mathbf{x}^{(j)} + \mathbf{y}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j)}$$

En la que  $\mathbf{y}^{(j)}$  es un vector en el que todos sus elementos son ceros excepto el correspondiente al valor de la demanda final u output neto de la industria o rama productiva  $j$ .

Y podemos escribir la solución de (3) como sigue:

$$(4) \quad \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{y}^{(j)} + \mathbf{y}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j)}$$

La columna  $j$  del producto matricial  $\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  expresa la producción verticalmente integrada que todo el sistema tiene que obtener por unidad de output neto de la industria  $j$ .

La reconstrucción del subsistema como generador de un determinado impacto ambiental es inmediata. Sea  $\mathbf{c}$  el vector de impacto directamente generado por unidad de producción de las distintas industrias objeto de análisis (contaminante atmosférico, residuo peligroso, consumo de energía...). Diagonalizando dicho vector<sup>2</sup> obtendríamos:

$$(5) \quad \hat{\mathbf{c}}\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{y}^{(j)} + \hat{\mathbf{c}}\mathbf{y}^{(j)} = \hat{\mathbf{c}}\mathbf{x}^{(j)}$$

---

<sup>1</sup> En el presente trabajo los vectores se definen como vectores columna. La conversión de un vector, así definido, a vector fila se expresa indicando la transposición con el signo (\*).

<sup>2</sup> Obviamente el análisis puede ser generalizado para un conjunto de impactos. En este caso tendríamos una matriz de impactos sectoriales clasificados por tipos.

La columna  $j$  del producto matricial  $\hat{\mathbf{c}}\mathbf{A}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$  expresa, ahora, la generación de contaminación verticalmente integrada que todo el sistema tiene que generar por unidad de output neto de la industria  $j$ . Y el vector  $\hat{\mathbf{c}}\mathbf{y}^{(j)}$  expresa el impacto inducido directamente por el propio sector en la obtención de su demanda final. Y una primera aplicación, entonces, de la metodología de los subsistemas es la descomposición del vector de contaminación directa e indirectamente generada por el sector, con el fin de obtener su demanda final, en dos componentes: la emisión generada en la obtención de sus inputs productivos y la emitida directamente por el sector por la obtención de su demanda final.

Es evidente que la expresión (5) permite el desarrollo de un amplio abanico de planteamientos analíticos, que el lector puede examinar en los textos anteriormente citados sobre subsistemas.

Aunque este planteamiento es interesante, desde la perspectiva de la demanda final, y el más adecuado para capturar la responsabilidad desde el punto de vista del consumo, resulta insuficiente en tanto en cuanto las ramas productivas no sólo son productores de bienes finales. La demanda final de una rama cualquiera puede ser cero y, sin embargo, el sector como tal exhibir un impacto ambiental directo mayor que cero. Es evidente que desde el momento en que un sector exhibe un impacto directo y una demanda final nula, sus emisiones, pongamos por caso, seguramente se localizaran en su demanda intermedia. No obstante, el modelo sin más no permite capturar esa situación.

En las páginas que siguen proponemos un análisis alternativo que permite mostrar el papel jugado por las distintas ramas productivas, desde la perspectiva de sus impactos ambientales, en el marco de la estructura productiva del sistema económico. Desde un punto de vista subsistémico, que es el que nos interesa, lo que se pretende es mostrar los impactos totales del subsistema vinculados a la producción de dicho sector atendiendo al uso de la misma en los distintos sectores. Se trata de determinar las ligazones intersectoriales, generadas a partir del proceso productivo del subsistema, atendiendo a los requerimientos directos e indirectos de los productos brutos (*gross output*), sean éstos utilizados para la obtención de la demanda final o para la demanda intermedia.

En este trabajo se aborda esta problemática a través del estudio de las ligazones output-output intersectoriales, mostrando la responsabilidad real, desde un punto de vista productivo, atendiendo a la responsabilidad industrial no del consumo, de cada uno de los sectores para un impacto ambiental total, directo e indirecto, del subsistema objeto de análisis.

Este planteamiento, desde la perspectiva de todo el sistema económico, fue desarrollado por Karunaratne, N. D. (1976), que lo considero como un marco semi-input-output, trabajo que fue recogido en la cuidadosa exploración de Hewings (1982) sobre la identificación de sectores clave. En una fecha posterior y con una rigurosa descripción matemática, es adoptado por Milana (1985) para determinar el empleo total de los outputs finales y los outputs brutos de cada industria en Italia para el año 1975. Heimler

(1991) utiliza el mismo método para la evaluación de las industrias clave en la economía China. Recientemente en Alcántara y Padilla (2019), se aborda la determinación de sectores clave en las emisiones de gases de efecto invernadero en España, desde esta perspectiva alternativa.

Nuestro interés se centra, pues, en el análisis de los impactos ambientales de una rama productiva cualquiera, en el marco de una economía regional. Parece razonable desarrollar el análisis en un marco interregional, toda vez que la producción de un determinado sector en la región depende no sólo del papel jugado en la estructura productiva regional, sino también de su articulación en el entramado de relaciones de intercambio de la región con otras regiones.

En el apartado siguiente se desarrolla un planteamiento analítico que toma en consideración lo apuntado anteriormente.

### Propuesta metodológica

Nuestro punto de partida es la ecuación básica del conocido modelo de Leontief.

$$(1) \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{x}$$

Representativo de la economía de un país cualquiera. Donde, como es bien sabido,  $\mathbf{A}$  es la matriz de coeficientes técnicos,  $\mathbf{x}$  el vector de outputs brutos e  $\mathbf{y}$  el vector de demanda final u output neto de la economía. Como nuestro interés se centra en el análisis de un sector de una economía de una región cualquiera (R) vinculada al resto de la economía nacional (N)<sup>3</sup>, y, en el marco de la economía de la región, para el estudio de los impactos ambientales de dicho sector podemos expresar el sistema (1) descompuesto en bloques, como sigue:

$$(2) \quad \begin{pmatrix} x^s \\ \mathbf{x}^r \\ \mathbf{x}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{ss} & \mathbf{a}^{sr} & \mathbf{a}^{sN} \\ \mathbf{a}^{rs} & \mathbf{A}^{rr} & \mathbf{A}^{rN} \\ \mathbf{a}^{Ns} & \mathbf{A}^{Nr} & \mathbf{A}^{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^s \\ \mathbf{x}^r \\ \mathbf{x}^N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^s \\ \mathbf{y}^r \\ \mathbf{y}^N \end{pmatrix}$$

Como vemos el sector  $s$  que pertenece a la región R se ha aislado tanto del resto de los sectores regionales como de los del conjunto de referencia (el resto del país pongamos por caso).

En la (2)  $x^{ss}$  expresa la producción bruta del sector regional objeto de estudio.  $y^s$  el output neto de dicho sector y  $a^{ss}$  la producción del propio sector por unidad de output bruto.  $\mathbf{a}^{sr} = (a_{sj}^{sr})$  es un vector fila  $1 \times (n-1)$  cuyo elemento característico expresa la

---

<sup>3</sup> Con el fin de no hacer excesivamente tedioso el desarrollo metodológico y hacer más inmediato el planteamiento diseñaremos un modelo birregional. El resultado es perfectamente generalizable a un modelo multirregional.

cantidad de output del sector  $s$  utilizada por  $j$  en R por unidad de output de dicho sector.  $\mathbf{a}^{sN} = (a_{sj}^{sN})$  es un vector fila  $1 \times (n-1)$  cuyo elemento característico, ahora, expresa la cantidad de output del sector  $s$  utilizada por  $j$  en N por unidad de output de dicho sector. En el caso de  $\mathbf{a}^{rs}$  y  $\mathbf{a}^{Ns}$  estaríamos hablando de la cantidad de input de los distintos sectores en R y N utilizados por unidad de output del sector  $s$ .  $\mathbf{A}^{rr} = (a_{ij}^{rr})_{(n-1) \times (n-1)}$  es la matriz de coeficientes técnicos intrarregionales cuyo elemento característico expresa el consumo de inputs procedentes del sector  $i$  por unidad de output del sector  $j$ , en el marco de la propia región, con exclusión del sector  $s$  objeto de análisis.  $\mathbf{A}^{NN} = (a_{ij}^{NN})_{n \times n}$  es, ahora, la matriz de coeficientes técnicos localizados en la región N<sup>4</sup>. Obviamente,  $\mathbf{A}^{rN}$  y  $\mathbf{A}^{Nr}$  son los coeficientes de inputs importados por N y R, respectivamente.

Si en la expresión (1) hacemos que  $\mathbf{A}$  sea igual a la suma de las siguientes matrices:

$$(3) \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^D + \mathbf{A}^O$$

en la que  $\mathbf{A}^D$  es una matriz diagonal construida con los elementos de la diagonal principal de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}^O$  el resto de elementos de  $\mathbf{A}$  fuera de la diagonal. Conviene notar en lo que sigue que los elementos de la diagonal principal de  $\mathbf{A}^O$  son ceros.

El sistema puede ser reescrito como sigue:

$$(4) \quad \mathbf{A}^D \mathbf{x} + \mathbf{A}^O \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x}$$

Y podemos operar la siguiente transformación en (2), atendiendo a la (4):

$$(5) \quad \begin{pmatrix} x^s \\ \mathbf{x}^r \\ \mathbf{x}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a^{ss}) & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{I}-\mathbf{A}_D^{rr}) & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{I}-\mathbf{A}_D^{NN}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^s \\ \mathbf{x}^r \\ \mathbf{x}^N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{a}^{sr} & \mathbf{a}^{sN} \\ \mathbf{a}^{rs} & \mathbf{A}_O^{rr} & \mathbf{A}^{rN} \\ \mathbf{a}^{Ns} & \mathbf{A}^{Nr} & \mathbf{A}_O^{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^s \\ \mathbf{x}^r \\ \mathbf{x}^N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^s \\ \mathbf{y}^r \\ \mathbf{y}^N \end{pmatrix}$$

Cuya solución, tal como fue expuesta en los trabajos citados al final del apartado anterior sería:

$$(6) \quad \begin{pmatrix} x^s \\ \mathbf{x}^r \\ \mathbf{x}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a^{ss}) & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{I}-\mathbf{A}_D^{rr}) & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{I}-\mathbf{A}_D^{NN}) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{a}^{sr} & \mathbf{a}^{sN} \\ \mathbf{a}^{rs} & \mathbf{A}_O^{rr} & \mathbf{A}^{rN} \\ \mathbf{a}^{Ns} & \mathbf{A}^{Nr} & \mathbf{A}_O^{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^s \\ \mathbf{x}^r \\ \mathbf{x}^N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^s \\ \mathbf{y}^r \\ \mathbf{y}^N \end{pmatrix}$$

Esta solución se sostiene tal como hemos demostrado en el Apéndice Matemático. Y la generalización de la expresión (A.6) en el citado apéndice conduciría a los siguientes resultados:

<sup>4</sup> Hemos supuesto que R y N tienen el mismo número de sectores productivos. Los resultados no se alterarían si, pongamos por caso, el número de sectores en N fuese inferior o mayor que en R.

$$(7) \quad x^s = (1 - a^{ss})^{-1} \mathbf{a}^{sr'} \mathbf{x}^r + (1 - a^{ss})^{-1} \mathbf{a}^{sN'} \mathbf{x}^N + (1 - a^{ss})^{-1} y^s$$

$$(8) \quad \mathbf{x}^r = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_D^{rr})^{-1} \mathbf{a}^{rs} x^s + (\mathbf{I} - \mathbf{A}_D^{rr})^{-1} \mathbf{A}_O^{rr} \mathbf{x}^r + (\mathbf{I} - \mathbf{A}_D^{rr})^{-1} \mathbf{A}_O^{rN} \mathbf{x}^N + (\mathbf{I} - \mathbf{A}_D^{rr})^{-1} \mathbf{y}^r$$

$$(9) \quad \mathbf{x}^N = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_D^{NN})^{-1} \mathbf{a}^{Ns} x^s + (\mathbf{I} - \mathbf{A}_D^{NN})^{-1} \mathbf{A}^{Nr} \mathbf{x}^r + (\mathbf{I} - \mathbf{A}_D^{NN})^{-1} \mathbf{A}_O^{NN} \mathbf{x}^N + (\mathbf{I} - \mathbf{A}_D^{NN})^{-1} \mathbf{y}^N$$

Nótese que en este planteamiento alternativo no integra el *feed-back* que se da en el caso de la inversa de Leontief. Éste está ahora asignado al sector respectivo al que se le ha vendido la mercancía correspondiente. Esto es, si el sector  $i$  vende al sector  $j$  una determinada cantidad de output, este último, desde una perspectiva de la producción, es el responsable del incremento de la producción de  $i$ . Nuestro planteamiento propone el análisis desde un punto de vista industrial, diríamos, y no desde una perspectiva del consumo.

Veamos ahora como computar el impacto ambiental de un subsistema desde una perspectiva interregional.

### Impactos ambientales subsistémicos interregionales

A partir de las expresiones (7), (8) y (9) es posible delimitar las ligazones intersectoriales específicas del sector  $s$  debidamente regionalizadas. Reparemos en que los encadenamientos adelante y hacia atrás de dicho sector vienen dados por la expresión (7), el primer sumando de la (8) y el primero de la (9). Necesitamos ahora vincular estas operaciones al impacto ambiental correspondiente.

Denotemos por  $\boldsymbol{\varepsilon}' = (\varepsilon^s \quad \boldsymbol{\varepsilon}^r \quad \boldsymbol{\varepsilon}^N)'$  el vector de impacto ambiental directo por unidad de output, de los distintos sectores oportunamente regionalizados.

Si en la (7) consideramos el último sumando a la derecha de la expresión, tenemos la producción inducida por el output neto del sector sobre si mismo. Y el impacto generado por este efecto vendría dado por:

$$(10) \quad \mu_p^s = \varepsilon^s (1 - a^{ss})^{-1} y^s$$

Los otros dos sumandos en la (7) tienen una clara perspectiva *forward*, ligazones hacia adelante tal como se les suele entender en la literatura sobre sectores clave. En este sentido, el impacto ambiental de  $s$  inducido por el resto de sectores de la región vendría dado por las siguientes expresiones:

$$(11) \quad \boldsymbol{\mu}_F^{r'} = (1 - a^{ss})^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{r'} \hat{\mathbf{a}}^{sr} \hat{\mathbf{x}}^r \quad \leftrightarrow \quad \mu_F^r = (1 - a^{ss})^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{r'} \hat{\mathbf{a}}^{sr} \mathbf{x}^r$$

La primera expresión a la izquierda muestra el vector de impacto de  $s$  inducido por cada sector particular en R. La expresión de la derecha mostraría el monto total de impacto de  $s$  desde una perspectiva, digamos, *forward*.

Por otro lado, el impacto inducido por los sectores productivos no pertenecientes a la región, esto es los que pertenecen a N, vendrían dados por las siguientes expresiones:

$$(12) \quad \boldsymbol{\mu}_F^{N'} = (1 - a^{ss})^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{N'} \hat{\mathbf{a}}^{sN} \hat{\mathbf{x}}^N \quad \leftrightarrow \quad \mu_F^N = (1 - a^{ss})^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{N'} \hat{\mathbf{a}}^{sN} \mathbf{x}^N$$

Interpretables en el mismo sentido que las expresiones de (11), solo que ahora con respecto a los sectores pertenecientes a N.

En el artículo de Sonis, et al. (1995), con un planteamiento idéntico a este sin relaciones interregionales, califican a los elementos  $\mu_F$  ligazones forward puras (*pure forward linkage: PFL*), y señalan que tal PFL “dará el impacto puro en el sector  $s$  de la producción total en el resto de la economía”. Obviamente, el feed-back que encontramos en la diagonal principal de la inversa de Leontief, está ahora atribuido, desde la perspectiva de la producción, al sector responsable del influjo del impacto sobre el sector  $s$  que hemos aislado.

En la expresión (8) el primer sumando a la derecha de la igualdad, muestra la producción de los sectores productivos pertenecientes a R inducida por el sector aislado  $s$ . Es claramente una producción vinculada a las ligazones hacia atrás inducidas por dicho sector. Se trata pues de un efecto indirecto de carácter *backward* interior. Y su cálculo lo podemos desarrollar como sigue:

$$(13) \quad \boldsymbol{\mu}_{B,int.}^r = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^r (\mathbf{I} - \mathbf{A}_D^{rr})^{-1} \mathbf{a}^{rs} x^s \quad \leftrightarrow \quad \mu_{B,int.}^r = \boldsymbol{\varepsilon}^{r'} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_D^{rr})^{-1} \mathbf{a}^{rs} x^s$$

A la izquierda de la expresión disponemos de los impactos ambientales de los distintos sectores en R, inducidos por el sector  $s$  vía adquisiciones de inputs procedentes de estos sectores. A la derecha el monto total de dichos impactos.

Como antes procedemos ahora a calcular los impactos exteriores a la región alentados por las compras, del sector  $s$ , de inputs producidos en la región N. En este caso se trataría de un efecto indirecto de carácter *backward* exterior. Y así obtendríamos:

$$(14) \quad \boldsymbol{\mu}_{B,ext.}^N = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^N (\mathbf{I} - \mathbf{A}_D^{NN})^{-1} \mathbf{a}^{Ns} x^s \quad \leftrightarrow \quad \mu_{B,int.}^N = \boldsymbol{\varepsilon}^{N'} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_D^{NN})^{-1} \mathbf{a}^{Ns} x^s$$

En este caso, los elementos  $\mu_B$  constituyen las ligazones backward puras (*pure backward linkage: PBL*) que, como señalan los mismos autores, tal PBL “dará el impacto puro en la economía del valor de la producción total en el sector  $s$ .”



El impacto ambiental total, pues, directo e indirecto, generado por el sector  $s$  objeto de análisis sería:

$$(15) \quad \text{Impacto total} = \underbrace{\mu_p^s}_{\text{Efecto propio}} + \underbrace{\mu_{B,\text{int.}}^r}_{\text{Backward interior}} + \underbrace{\mu_{B,\text{ext.}}^N}_{\text{Backward exterior}}$$

Los dos últimos sumandos a la derecha de la expresión no son sino el resultado del efecto *spillover* generado por la expansión de la demanda de  $s$ , tanto a nivel intrarregional como interregional.

### **Sobre los feed-backs: una propuesta de cálculo**

En las páginas anteriores hemos atendido al estudio de un sector cualquiera de una economía regional, considerando relevante el análisis de las ligazones output-output, como señalábamos al principio. Nos parece que resulta claro que las responsabilidades sectoriales en el impacto ambiental, resultantes de un planteamiento ceñido exclusivamente a los procesos productivos, es relevante desde un punto de vista puramente tecnológico. Así, si volvemos a la expresión (11) el vector a la izquierda de la expresión está expresando de forma precisa el impacto ambiental del sector  $s$  atribuible a los distintos sectores por el uso de los inputs procedentes de estos necesarios para sus procesos productivos. En cierto modo, lo que hemos hecho es atribuir a los sectores respectivos el impacto ambiental atribuible al feed-back sobre  $s$  que hubiéramos obtenido con un planteamiento convencional. Lo mismo podríamos decir si nos refiriéramos a la expresión (12).

Aunque nuestro planteamiento nos parece sugerente desde una perspectiva industrial, ello no quiere decir que en determinados casos el feed-back no sea relevante y que convenga conocerlo de cara al diseño, en nuestro caso, de determinadas políticas ambientales.

Veamos, entonces, como podemos computar los impactos ambientales imputables a los mencionados feed-backs a partir de nuestro planteamiento.

En primer lugar abordaremos la cuestión desde una perspectiva intrarregional. El primer sumando a la derecha de la igualdad expresa la producción que los sectores de la región, exceptuando  $s$ , han tenido que realizar para abastecer a este sector de inputs necesarios para su producción. Así,

$$(16) \quad \mathbf{x}_s^r = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_D^{rr})^{-1} \mathbf{a}^{rs} x^s$$

Muestra el vector de producción para sector  $s$  del resto de sectores en la región. Un claro efecto *spillover*. Y podemos proponer la siguiente igualdad para la producción total en  $R$ .

$$(17) \quad \mathbf{x}^r = (\mathbf{x}^r - \mathbf{x}_s^r) + \mathbf{x}_s^r$$

Denotemos por  $x_r^s$  la producción del sector  $s$  para el resto de sectores de la región, esto es, el primer sumando a la derecha de la expresión (7). Si incorporamos (17) en el mencionado primer sumando tendríamos:

$$(18) \quad x_r^s = (1 - a^{ss})^{-1} \mathbf{a}^{sr'} (\mathbf{x}^r - \mathbf{x}_s^r) + (1 - a^{ss})^{-1} \mathbf{a}^{sr'} \mathbf{x}_s^r$$

El segundo sumando es claramente un feed-back intrarregional. Procediendo del mismo modo a partir de la expresión (9) obtendríamos:

$$(19) \quad \mathbf{x}_s^N = (1 - a^{ss})^{-1} \mathbf{a}^{sN'} (\mathbf{x}^N - \mathbf{x}_s^N) + (1 - a^{ss})^{-1} \mathbf{a}^{sN'} \mathbf{x}_s^N$$

Y dispondríamos del efecto feed-back interregional.

La computación del impacto ambiental atribuible a estos efectos es inmediato, basta con aplicar los coeficientes de impacto tal como hicimos anteriormente.

## Conclusiones

En las páginas anteriores hemos abordado el estudio de un sector productivo particular, en el marco de una economía regional, desde el punto de vista de la concepción del mismo como un subsistema. Dada la importancia de los vínculos interregionales desde la perspectiva de una economía regional, bien con la economía de otras regiones como con el resto del país, hemos ampliado el campo de la investigación aplicando un planteamiento interregional.

A partir del diseño matemático desarrollado hemos obtenido formulaciones conducentes a una adecuada formulación de indicadores que permitan un estudio riguroso de los impactos ambientales que tienen su origen en el comportamiento económico de la sociedad. En este sentido, se aporta una formulación matemática adecuada para el conocimiento de las ligazones intersectoriales tanto desde una perspectiva *forward* como *backward*, en un sentido “puro”, considerando el aspecto puramente industrial de estas interrelaciones.

Por otro lado, hemos aislado el impacto ambiental del sector objeto de estudio, atendiendo exclusivamente a su impacto directo, relativo a la obtención de su demanda final u output neto.

Por último, el hecho que este planteamiento alternativo, por la naturaleza de sus objetivos, prescinda de un enfoque desde el consumo, no significa que no sea posible la

determinación matemática de posibles *feed-backs* que pueden ser relevantes desde un punto de vista del consumo. En el caso de una economía regional, dichos *feed-backs* son relevantes para el conocimiento de los impactos atribuibles al efecto de la relación entre un incremento de demanda en la región y su comercio con otras regiones.

Sobre los resultados obtenidos de la computación de las expresiones que hemos considerado destacables, obviamente, el investigador puede desarrollar indicadores pertinentes, tanto para distinguir la importancia de los mismos como para la implementación de análisis comparativos.

## Apéndice matemático

La solución del sistema (2) vendría dada, como es habitual en el modelo de Leontief, conforme a la siguiente expresión:

$$(A.1) \quad \begin{pmatrix} x^s \\ \mathbf{x}^r \\ \mathbf{x}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a^{ss}) & -\mathbf{a}^{sr} & -\mathbf{a}^{sN} \\ -\mathbf{a}^{rs} & (I-\mathbf{A}^{rr}) & -\mathbf{A}^{rN} \\ -\mathbf{a}^{Ns} & -\mathbf{A}^{Nr} & (I-\mathbf{A}^{NN}) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y^s \\ \mathbf{y}^r \\ \mathbf{y}^N \end{pmatrix}$$

La obtención de la inversa por bloques, utilizando el complemento de Schur, nos va a permitir la determinación de información rigurosa sobre el subsistema propuesto.

Si tenemos en cuenta que  $(1-a^{ss})$  tiene inverso, el complemento de Schur de  $a^{ss}$  vendría dado por

$$(A.2) \quad \Theta_s = \begin{pmatrix} (I-\mathbf{A}^{rr}) & -\mathbf{A}^{rN} \\ -\mathbf{A}^{Nr} & (I-\mathbf{A}^{NN}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\mathbf{a}^{rs} \\ -\mathbf{a}^{Ns} \end{pmatrix} (1-a^{ss})^{-1} \begin{pmatrix} -\mathbf{a}^{sr} & -\mathbf{a}^{sN} \end{pmatrix}$$

Y la inversa en (3) aplicando el coeficiente de Schur sería:

$$(A.3) \quad \begin{pmatrix} (1-a^{ss})^{-1} + (1-a^{ss})^{-1} (\mathbf{a}^{sr} \mathbf{a}^{sN})' \Theta_s^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{rs} \\ \mathbf{a}^{Ns} \end{pmatrix} (1-a^{ss})^{-1} (\mathbf{a}^{sr} \mathbf{a}^{sN})' & (1-a^{ss})^{-1} \Theta_s^{-1} \\ \Theta_s^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{rs} \\ \mathbf{a}^{Ns} \end{pmatrix} (1-a^{ss})^{-1} & \Theta_s^{-1} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema sería:

$$(A.4)$$

$$x^s = (1-a^{ss})^{-1} y^s + (1-a^{ss})^{-1} (\mathbf{a}^{sr} \mathbf{a}^{sN})' \Theta_s^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{rs} \\ \mathbf{a}^{Ns} \end{pmatrix} (1-a^{ss})^{-1} y^s + (1-a^{ss})^{-1} (\mathbf{a}^{sr} \mathbf{a}^{sN})' \Theta_s^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y}^r \\ \mathbf{y}^N \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^r \\ \mathbf{x}^N \end{pmatrix} = \Theta_s^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{rs} \\ \mathbf{a}^{Ns} \end{pmatrix} (1-a^{ss})^{-1} y^s + \Theta_s^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y}^r \\ \mathbf{y}^N \end{pmatrix}$$

Reordenando términos en la primera ecuación, escribiríamos:

$$(A.5) \quad x^s = (1-a^{ss})^{-1} (\mathbf{a}^{sr} \mathbf{a}^{sN})' \underbrace{\left[ \Theta_s^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{rs} \\ \mathbf{a}^{Ns} \end{pmatrix} (1-a^{ss})^{-1} y^s + \Theta_s^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y}^r \\ \mathbf{y}^N \end{pmatrix} \right]}_{\begin{pmatrix} \mathbf{x}^r \\ \mathbf{x}^N \end{pmatrix}} + (1-a^{ss})^{-1} y^s$$

Y habida cuenta de que la expresión entre corchetes no es sino el vector de outputs distintos a los del subsistema, podemos escribir:

$$(A.6) \quad x^s = (1-a^{ss})^{-1} (\mathbf{a}^{sr} \mathbf{a}^{sN})' \begin{pmatrix} \mathbf{x}^r \\ \mathbf{x}^N \end{pmatrix} + (1-a^{ss})^{-1} y^s = (1-a^{ss})^{-1} \mathbf{a}^{sr'} \mathbf{x}^r + (1-a^{ss})^{-1} \mathbf{a}^{sN'} \mathbf{x}^N + (1-a^{ss})^{-1} y^s$$

El resultado alcanzado se corresponde con el obtenido en Alcántara y Padilla (2019). Y es perfectamente generalizable a todos los sectores del sistema, tal como se hace en las expresiones (7), (8) y (9) del texto.

Dos demostraciones con una perspectiva distinta, con el mismo resultado, pueden consultarse en los trabajos de Cai, J., Leung, P.S. (2004) y Sonis, M., Guilhoto, J., Hewings, G. J., & Martins, E. B. (1995).

## Referencias bibliográficas

Alcántara, V. y Padilla, E. (2019): “Key sectors in greenhouse gas emissions in Spain. An alternative input–output analysis”, *Journal of Industrial Ecology*  
<https://doi.org/10.1111/jiec.12948>

Alcántara, V. (1995): Economía y contaminación atmosférica: hacia un nuevo enfoque desde el análisis input-output. Tesis doctoral, Universitat de Barcelona

Alcántara, V., Padilla, E. (2009) “Input–output subsystems and pollution: An application to the service sector and CO2 emissions in Spain”, *Ecological Economics*, Vol. 68, pp. 905–914.

Cai, J., Leung, P.S., 2004. “Linkage measures: a revisit and a suggested alternative”. *Economic Systems Research* 16, 65-85.

Fritz, O.M., Sonis, M., and Hewings, G.J.D. (1998) "A Miyazawa analysis of interactions between polluting and non-polluting sectors", *Structural Change and Economics Dynamics*, Vol. 9, pp. 289 – 305.

Heimler, A., (1991): "Linkages and vertical integration in the Chinese economy", *Review of Economics and Statistics* 73, 261–267

Hewings, G.J.D. (1982): "The empirical identification of key sectors in an economy: A regional perspective", *Developing Economies* 20 (2), 173–195.

Karunaratne, N. D. (1976): "Quantification of Sectoral Developments Prospects in Papua New Guinea Using Tinbergen and Rasmussen Criteria", *Developing Economies*, vol. 14, n° 3

Llop, M. and Tol, R.S.J. (2012): "Decomposition of sectoral greenhouse gas emissions: a subsystem input-output model for the Republic of Ireland", *Journal of Environmental Planning and Management*, DOI:10.1080/09640568.2012.717889

Milana, C. (1985): "Direct and indirect requirements for gross output in input–output analysis", *Metroeconomica* 37, 283–292.

Navarro, F. y Alcántara, V. (2010). Las emisiones de metano (CH<sub>4</sub>) en el subsistema agroalimentario catalán: un análisis input-output alternativo. *Economía Agraria y Recursos Naturales*, 10, pp. 25–39.

Pasinetti, L.L., 1977. "La nozione di settore verticalmente integrato nel-l'analisi económica" en Pasinetti, 1977: *Contributi alla teoria della produzione congiunta*, Il mulino, Bologna

Piaggio, M., Alcántara, V., Padilla, E., (2014): "Greenhouse gas emissions and economic structure in Uruguay", *Economics System Research* 26 (2), 155–176.

Sánchez Chóliz, J. y Duarte, R. (2003): "Analysing pollution by vertically integrated coefficients, with an application to the water sector in Aragon", *Cambridge Journal of Economics*, 27, pp. 433-448

Sonis, M., Guilhoto, J., Hewings, G. J., & Martins, E. B. (1995). "Linkages, key sectors, and structural change: Some new perspectives". *The Developing Economies*, 33(3), 243–246.